

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан.

4 класс, заключительный этап. 10 февраля 2024 года. Решения задач

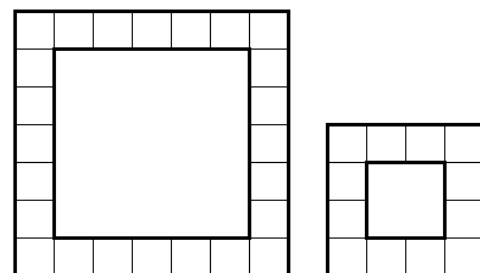
Время выполнения заданий — 180 минут

Максимальный балл — 42

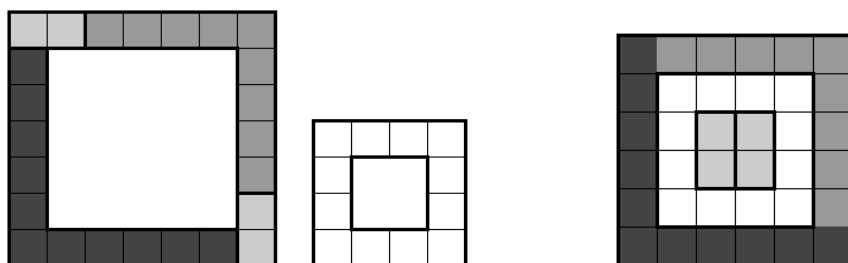
1. Пять тарелок расположены по кругу. Как расположить на тарелках 20 яблок так, чтобы на разных тарелках было разное число яблок и на каждой тарелке яблок было меньше, чем на соседних с ней тарелках в сумме? *Достаточно привести один вариант решения.*

Решение. Например, можно расположить яблоки по кругу так: 6, 3, 2, 5, 4.

2. Есть рамка квадрата 7×7 толщиной в одну клетку и рамка квадрата 4×4 толщиной в одну клетку. Требуется провести несколько разрезов по линиям клеток так, чтобы всего получилось пять частей. Потом из этих частей нужно составить клетчатый квадрат без пропусков и наложений. *Достаточно привести один вариант решения.*



Решение: Можно разрезать фигуры на пять частей и сложить квадрат, например, следующим образом:



3. Все цифры даты 10.02.2024 записали на восьми карточках и расставляют эти карточки в выражение на рисунке в любом порядке. Сколько различных результатов значения этого выражения может получиться? *Обоснуйте свой ответ.*

$$\boxed{} \times \boxed{} + \boxed{} \times \boxed{} + \boxed{} \times \boxed{} + \boxed{} \times \boxed{} = ?$$

Ответ. 6 значений.

Решение. Выражение представляет из себя сумму четырёх произведений. Если в произведении есть 0, то всё произведение равно 0. У нас есть три карточки с цифрой

«0», поэтому только одно или два произведения будут ненулевыми. Возможные ненулевые произведения двух чисел: $1 \times 2 = 2$, $1 \times 4 = 4$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 4 = 8$.

Если будет одно ненулевое произведение, оно может принимать значения 2, 4 или 8, так как есть только одна карточка с единицей.

Если будет два ненулевых произведения, то возможные их суммы: $1 \times 2 + 2 \times 2 = 6$, $1 \times 2 + 2 \times 4 = 10$, $1 \times 4 + 2 \times 2 = 8$, $2 \times 2 + 2 \times 4 = 12$. В итоге, могут быть получены 6 значений: 2, 4, 6, 8, 10, 12.

4. Два мальчика и три девочки пришли в магазин купить несколько ручек. Каждый мальчик купил себе по две чёрные ручки, а каждая девочка купила себе одну красную ручку. Оказалось, что девочки потратили в сумме в два раза больше денег, чем потратили оба мальчика в сумме. Что обойдется дешевле: набор из 27 красных ручек или набор из 70 чёрных ручек? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Набор из 70 чёрных ручек.

Решение. Из условия мы понимаем, что четыре чёрные ручки обошлись в два раза дешевле, чем три красные ручки. Поэтому стоимость трёх красных ручек такая же, как и у восьми чёрных ручек. 27 красных ручек стоят дороже в 9 раз, а, значит, стоят столько же, сколько и 72 черные ручки. Следовательно, 70 чёрных ручек дешевле.

5. Футбольные команды «Еноты» и «Звезды» играли серию матчей до трёх побед одной из команд. Оказалось, что каждый матч был выигран одной из команд с разницей в три гола, причём игроки–мальчики забили столько же голов, сколько и игроки–девочки. Какое наименьшее количество забитых мячей могло быть, если известно, что в каждом матче количество мячей, забитых победителем серии, было различным? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ: 18 мячей.

Решение: Заметим, что всего забито чётное количество голов, поскольку мальчики и девочки забили поровну.

В рамках одного матча одна команда забила на три гола больше, чем другая, а значит эти два числа разной чётности. Следовательно, общее число голов за один матч — нечётно. Тогда для того, чтобы всего было забито чётное количество голов, матчей в серии должно быть чётное количество.

Так как победитель серии выиграл три матча, то проигравшая команда выиграла от 0 до 2 матчей. Поэтому возможен только вариант, когда проигравшая команда выиграла один матч.

В итоге прошло четыре матча, в трёх из которых победитель забил хотя бы 3, 4 и 5 голов соответственно, поскольку забитых мячей было разное количество, а проигравшая команда в оставшемся матче забила хотя бы 3 гола, а в проигранных хотя бы 0, 1 и 2 соответственно. Тогда забитых голов хотя бы $3 + 4 + 5 + 0 + 3 + 0 + 1 + 2 = 18$.

Пример, как могло оказаться забито 18 мячей: 1-ый матч — счёт 3:0, 2-ой матч — счёт 0:3, 3-ий матч — 1:4, 4-ый матч — 2:5.

6. На карусели катаются Аня, Богдан, Вика, Гена, Даша и Егор. Дети высказали следующие утверждения:

Аня: «Рядом с Егором нет девочки»;

Богдан: «Даша и Аня сидят через одного человека»;

Вика: «Я не рядом ни с Геной, ни с Егором»;

Гена: «Богдан едет сразу за Аней»;

Даша: «Богдан сидит напротив Гены»;

Егор: «Кто-то из девочек врёт».

В каком порядке дети катаются, если известно, что только один ребёнок соврал?

Укажите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ. По кругу по направлению движения: Аня, Вика, Даша, Гена, Егор, Богдан.

Решение. Можно считать, что карусель движется по часовой стрелке. Либо врёт Егор, либо из его утверждения следует, что врёт кто-то из девочек. Следовательно, остальные мальчики в любом случае говорят правду. Из утверждения Богдана следует, что Даша и Аня сидят через одного человека. Рассмотрим два случая.

1 случай. Если Аня сидит от Даши по часовой стрелке через одно место. Тогда между Дашей и Аней сидит Богдан по утверждению Гены. Тогда утверждение Ани верным быть не может, так как, чтобы рядом с Егором не было девочек, его должны окружать только Гена и Богдан. Также верным не может быть утверждение Вики, так как на оставшиеся три подряд идущих места претендуют только Вика, Гена и Егор. А, значит, уже есть два неверных утверждения.

2 случай. Если Даша сидит от Ани по часовой стрелке через одно место. Тогда Даша сидит напротив Богдана, а, значит, утверждение Даши истинным быть не может. Егор должен сидеть между мальчиками по утверждению Ани. Но такое место только одно — первое от Богдана против часовой стрелки, и тогда на следующем месте против часовой стрелки сидит Гена. Получается единственный вариант, который подходит под все условия, кроме утверждения Даши.