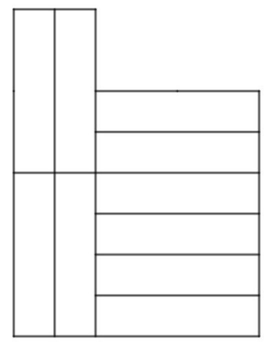
Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
7 класс, финальный тур. 10 февраля 2024 года. Решения задач

Время выполнения заданий — 180 минут **Максимальный балл — 42**

Предварительные результаты будут опубликованы 22 февраля. Заявления на апелляцию будут приниматься до 22.00 26 февраля. Подробности на сайте kazan-math.ru*. Условия задач можно забрать с собой.*

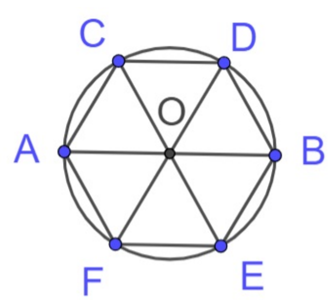
1. Известно, что квадрат 6×6 нельзя разрезать на прямоугольники 1×4. Какое наименьшее количество клеток надо пририсовать к квадрату 6×6 так, чтобы получившуюся фигуру можно было разрезать на прямоугольники 1×4? *Необходимо не только привести пример разрезания, но и обосновать, почему меньшим количеством клеток обойтись нельзя.*



Ответ. 4 клетки.

Решение. Площадь получившейся фигуры должна делиться на 4. Площадь исходного квадрата равна 36. Следующее после 36 число, кратное 4, равно 40. Следовательно, наименьшее число клеток, которые необходимо пририсовать, равно $40 - 36 = 4$. Один из возможных примеров показан на рисунке.

2. На песчаной дорожке в форме окружности в двух диаметрально противоположных точках A и B находится по одному страусу. Известно, что каждый из них может пробежать весь круг за одну минуту. Первоначально страус в точке A бежит по кругу по часовой стрелке, а страус в точке B стоит, зарыв голову в песок. Когда один из страусов обнаруживает, что приблизился к другому страусу на расстояние, равное радиусу круга, то он пугается, останавливается и прячет голову в песок. С другой стороны, если страус чувствует, что кто-то приблизился к нему на расстояние, равное радиусу круга, то он начинает убегать от приблизившегося по дорожке. Где будут страусы ровно через 2024 минуты? *Обоснуйте свой ответ.*



Ответ. На первоначальных позициях.

Решение. Из шести равносторонних треугольников можно сложить равносторонний шестиугольник, центр которого будет равноудален от всех вершин на расстояние равное стороне (см рис). Поэтому можно разбить окружность на шесть дуг равной длины так, чтобы точки A и B являлись концами дуг. Обозначим концы дуг буквами C, D, E, F, как показано на рисунке.

Так как страус пробегает весь круг за минуту, то одну дугу он пробегает за 10 секунд. Обозначим страуса в точке A буквой X, а страуса в точке B — буквой Y. Через 20 секунд X окажется в точке D. Несложно проверить, что за $6 \cdot 40$ секунд, то есть, за 4 минуты, они вернутся на эти же позиции. Действительно, через 40 секунд страус Y прибежит в точку C и зароет голову в песок, а страус X

начнет убегать из точки D. Дальнейшие их перемещения удобно изобразить в виде таблицы:

время	0	40	80	120	160	200	240
X	D	D	A	A	E	E	D
Y	B	C	C	F	F	B	B

Заметим, что число 2024 делится на 4. Поэтому через 2024 минуты 20 секунд страус X окажется в точке D, а страус Y — в точке B. Так как предыдущие 40 секунд страус X бежал из E в D, а страус Y стоял в точке B, то за 20 секунд до этого X находился в точке A, а Y — в точке B.

3. На уроке сидит 25 школьников, каждый из которых или рыцарь или лжец. После каждой перемены они заново рассаживаются на эти же 25 мест. Затем каждый из них, для кого это возможно, говорит: «Фу, тут когда-то сидел лжец!» (не обязательно, что на предыдущем уроке). Известно, что на каждом уроке, кроме первого, количество произнесенных фраз было больше, чем на предыдущем уроке. Какое наибольшее количество уроков могло быть у этих школьников? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 25 уроков.

Решение. *Оценка.* На первом уроке никто ничего не говорил. На втором уроке была произнесена хотя бы одна фраза. Это означает, что либо найдется лжец, севший на место рыцаря, либо найдется рыцарь, севший на место лжеца. Заметим, однако, что если нашелся один из них, то обязательно найдется и другой. Действительно, если, например, какой-то рыцарь сел на место лжеца, то остальные рыцари (пусть из будет n человек) не смогут занять все $n+1$ место, занятое рыцарями на первом уроке. Значит, хотя бы одно из них займет лжец.

Таким образом, оба эти школьника произнесут фразу. Так как на каждом следующем уроке произносится хотя бы на одну фразу больше, то на k-ом уроке произносится хотя бы k фраз. Следовательно, было не более 25 уроков.

Пример. Пусть один лжец и 24 рыцаря сидят по кругу. После каждой перемены каждый из них пересаживается на одно место по часовой стрелке. Для каждого $k = 2, 3, \ldots, 25$ на k-ом уроке лжец произнесет фразу, так как до него на этом месте сидели только рыцари. А так же в этот момент будет $k-1$ место, где успел посидеть лжец на предыдущих уроках. Рыцари на этих местах так же произнесут фразу. Остальные персонажи не смогут произнести фразу, так как они рыцари и на их местах до этого сидели только рыцари. Итого будет произнесено ровно k фраз на k-ом уроке.

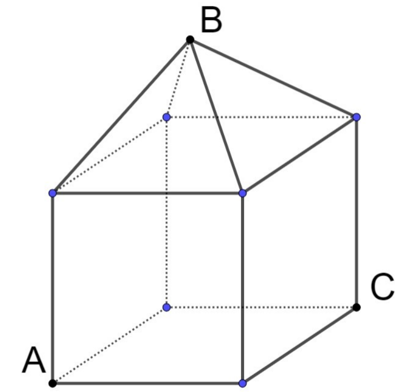
4. Упорный мальчик Петя в каком-то порядке раскрывает скобки и приводит подобные слагаемые в выражении $(z+1)^6$. Однако, иногда он путается в своем почерке и вместо буквы z читает цифру 2 (но не наоборот), сохраняя при этом все знаки арифметических действий. Например, он может прочитать выражение $4z \cdot z^2$

правильно, а может вместо него прочитать $4 \cdot 2 \cdot z^2$, или $4 \cdot z \cdot 2^2$, или $4 \cdot 2 \cdot 2^2$. Могло ли у Пети в конце получиться выражение $z^6 + 2z^5 + 17z^4 + 26z^3 + 19z^2 + 18z + 7$? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Нет.

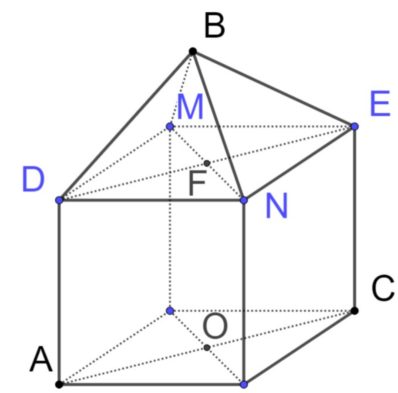
Решение. Решим задачу методом от противного. Пусть Петя смог получить такое выражение. Если с самого начала подставить вместо z значение 2, то значение первоначального и конечного выражения должны будут совпасть. Но это не так, ибо в этом случае $(z + 1)^6 = (2 + 1)^6 = 3^6 = 729$, а $z^6 + 2z^5 + 17z^4 + 26z^3 + 19z^2 + 18z + 7 = 64 + 64 + 272 + 208 + 76 + 36 + 7 = 727$. Противоречие.

5. У Васи есть 16 одинаковых спичек. Он собрал из них фигуру «*домик*»: из 12 спичек собирается кубик, а их четырёх оставшихся делается «*крыша*» (см. рисунок). Найдите величину угла ABC. *Обоснуйте свой ответ.*



Ответ. $45°$.

Решение. Обозначим точки, как показано на рисунке. Рассмотрим фигуру $ADBEC$. Она состоит из прямоугольника $ADEC$ и треугольника DBE. Докажем, что на самом деле это один плоский пятиугольник. Отметим на продолжении отрезка OF такую точку B', что $FB' = FD$. Из равенства треугольников FDB' и FDN следует, что $DB' = DN$. Аналогично получаем $DN = B'D = B'N = B'E = B'M$. Но точка с таким условием вне куба только одна, поэтому B' совпадает с B. Из этого следует, что $ADBEC$ — плоский пятиугольник, так как точка B лежит на средней линии прямоугольника $ADEC$. Далее будем рассматривать только пятиугольник $ADBEC$.



Так как треугольник DBE по трём сторонам равен половинке квадрата со стороной, равной одной спичке, то $\angle DBE = 90°$ и $\angle DEB = \angle EDB = 45°$.

Осталось заметить, что $DA = DB$, поэтому $\angle DBA = \frac{1}{2}(180° - 135°) = 22{,}5°$. Аналогично, $\angle EBC = 22{,}5°$. Следовательно, $\angle ABC = \angle DBE - \angle DBA - \angle EBC = 45°$.

6. Расставьте в ряд все числа от 1 до 100 так, чтобы для каждого натурального n $(n > 1)$ сумма любых n подряд идущих чисел не делилась на n. *Необходимо не только привести один пример расстановки, но и доказать, почему он подходит.*

Решение. **Лемма.** Сумма n подряд идущих натуральных чисел делится на n при нечетном n и не делится при четном n.

Доказательство. Пусть первое число в ряду равно a. Вычтем из каждого числа $a - 1$. Тогда сумма всех чисел уменьшится на $n(a - 1)$, что, очевидно, не повлияет на делимость на n. Сумма оставшихся чисел равна $1 + 2 + \ldots + n$. Как известно, эта сумма равна $\frac{n(n+1)}{2}$. При нечетном n эта величина делится на n, так как $\frac{n+1}{2}$ — целое число, а при четном — не делится, так как $\frac{n+1}{2}$ — нецелое число. Доказательство леммы завершено.

Рассмотрим первые 100 натуральных чисел. Разобьем их на пары и в каждой паре поменяем числа местами. Рассмотрим полученный ряд 2, 1, 4, 3, 6, 5, ..., 100, 99.

Если n четно, то n подряд идущих чисел или

а) состоят из целого числа пар и тогда их сумма равна сумме n подряд идущих чисел, что не делится на n по лемме,

или

б) состоят из целого числа пар и еще двух чисел по краям. Заметим, что если уменьшить на 1 число без пары слева и увеличить на 1 число без пары справа, то сумма не изменится. Но тогда сумма всех чисел снова равна сумме n подряд идущих чисел.

Если n нечетно, то n подряд идущих чисел содержат целое число пар и еще одно число остается без пары. Заметим, что если число без пары увеличить на 1 (если оно оказалось слева) или уменьшить на 1 (если оно оказалось справа), то сумма полученных чисел снова равна сумме n подряд идущих чисел. По лемме эта сумма делится на n, а, значит, первоначальная сумма не делится на n.