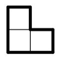
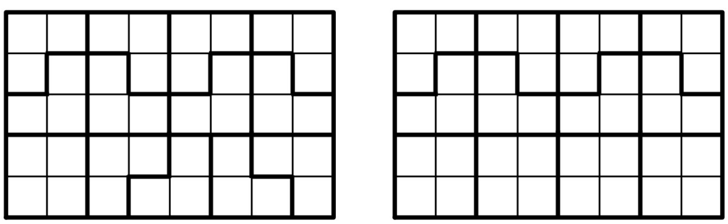
Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
6 класс, финальный тур. 10 февраля 2024 года. Решения задач

Время выполнения заданий — 180 минут **Максимальный балл — 42**

Предварительные результаты будут опубликованы 22 февраля. Заявления на апелляцию будут приниматься до 22.00 26 февраля. Подробности на сайте kazan-math.ru. *Условия задач можно забрать с собой.*

1. Прямоугольник 5×8 требуется разрезать без остатка на квадратики 2×2 и фигуры «уголок»  так, чтобы количество уголков было ровно в k раз больше количества квадратиков, где k — натуральное число. **а)** Нарисуйте решение для какого-нибудь одного значения k; **б)** Нарисуйте решение для какого-нибудь другого значения k. *В каждом пункте достаточно привести один пример разрезания. Фигурки можно поворачивать.*

Решение. На рисунке показаны два примера для $k = 12$ (один квадратик) и $k = 2$ (8 уголков и 4 квадратика).



Замечание. Можно показать, что для других значений k решений нет. Действительно, если квадратиков всего x штук, то уголков — kx штук. Тогда общая площадь фигурок равна $4x + 3kx = x(3k + 4) = 40$. Следовательно, число $3k + 4$ — делитель числа 40, причем имеющий остаток 1 при делении на 3, и не меньший, чем 7 (так как $k \geqslant 1$). Такие делители — это только 10, 16 и 40. При $3k + 4 = 10$ и $3k + 4 = 40$ получаем $k = 2$ и $k = 12$. При $3k + 4 = 16$ получаем $k = 4$, $x = 5$. Несложно аккуратным перебором проверить, что если вырезать из прямоугольника 5×8 пять квадратиков 2×2, то оставшуюся часть нельзя разрезать на уголки. Но в задаче этого не требуется.

2. Алёна расставила в клетках прямоугольника 4×9 натуральные числа от 1 до 36 (каждое — по одному разу). После этого она разрезала прямоугольник на шесть клеточных фигурок (необязательно одинаковых) и посчитала сумму всех чисел в каждой из них. Могли ли полученные шесть сумм быть шестью последовательными натуральными числами? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Нет.

Первое решение. Среди чисел от 1 до 36 половина — нечетные, их всего 18 штук, поэтому их сумма четна. Среди шести последовательных натуральных чисел ровно три нечетных, поэтому их сумма нечетна. Таким образом, одно и то же число (сумма всех чисел от 1 до 36) должно быть четным и нечетным одновременно. Противоречие.

Второе решение. Сумма чисел от 1 до 36 равна $37 \cdot 18 = 666$. Предположим, что она равна сумме шести последовательных натуральных чисел, наименьшее из которых равно x. Тогда $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5) = 666$. Приводя подобные слагаемые, получим $6x+15 = 666$, откуда $6x = 651$ или $x = \frac{217}{2}$. Но это число не является натуральным.

3. Инспектор Морс выстроил несколько подозреваемых в ряд. Каждый из них заявил, что он стоит между двумя лжецами. Проанализировав ситуацию, инспектор понял, что среди подозреваемых честных людей может быть любое количество от трёх до пяти. Сколько всего могло быть подозреваемых в строю? Каждый из подозреваемых либо честный, т.е. всегда говорит правду, либо лжец, т.е. всегда лжёт. *Укажите все ответы, покажите, почему они подходят, и объясните, почему других нет.*

Ответ. 11.

Решение. По традиции назовем честного человека *рыцарем.*

Заметим, что три лжеца подряд стоять не могли, так как в таком случае средний из них скажет правду. Поэтому среди любых троих подряд стоящих есть хотя бы один рыцарь. Отсюда следует, что в том случае, когда рыцарей ровно трое, в ряду не может быть больше 11 человек. Действительно, если бы их было хотя бы 12, то из них можно бы было выделить четыре непересекающихся тройки, а тогда рыцарей было бы хотя бы четверо.

Кроме того, никакие два рыцаря, очевидно, не могут стоять рядом, и никакой рыцарь не может стоять с краю. Отсюда следует, что рыцари стоят поодиночке и разделены группами лжецов (по одному или по двое). Таким образом, в ситуации, когда рыцарей ровно пятеро, лжецов должно быть не менее шести (четыре промежутка между пятью рыцарями и еще хотя бы двое по краям). Но тогда общее количество людей не меньше, чем $5+6 = 11$.

Следовательно, их может быть только 11.

Примеры расстановок: ЛЛРЛЛРЛЛРЛЛ (3 рыцаря), ЛРЛРЛЛРЛЛРЛ (4 рыцаря), ЛРЛРЛРЛРЛРЛ (5 рыцарей).

4. За круглым столом сидят 10 человек. Каждый из них задумал некоторое число и сообщил это число обоим своим соседям по столу (одному соседу слева и одному справа). После этого каждый сидящий за столом назвал вслух среднее арифметическое тех двух чисел, которые ему сообщили его соседи. В порядке обхода вокруг стола были названы числа 1, 2, 3, …, 9, 10. Какое число задумал человек, назвавший число 7? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 2.

Решение. Пусть человек, назвавший число 1, задумал число x_1, человек, назвавший число 2, задумал число x_2, и так далее, человек, назвавший число 10, задумал число x_{10}. Заметим, что

$$2+4+6+8+10 = \frac{x_1+x_3}{2}+\frac{x_3+x_5}{2}+\frac{x_5+x_7}{2}+\frac{x_7+x_9}{2}+\frac{x_9+x_1}{2} = x_1+x_3+x_5+x_7+x_9.$$

Таким образом, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 = 30$.

Кроме того,

$$\frac{x_3+x_5}{2} = 4, \quad \frac{x_9+x_1}{2} = 10,$$

откуда $x_3 + x_5 + x_9 + x_1 = 8 + 20 = 28$. Следовательно, $x_7 = 30 - 28 = 2$.

Замечание. Рассуждая аналогично, можно найти и все остальные числа: $x_1 = 6$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 9$, $x_5 = 10$, $x_6 = 1$, $x_8 = 13$, $x_9 = 14$, $x_{10} = 5$.

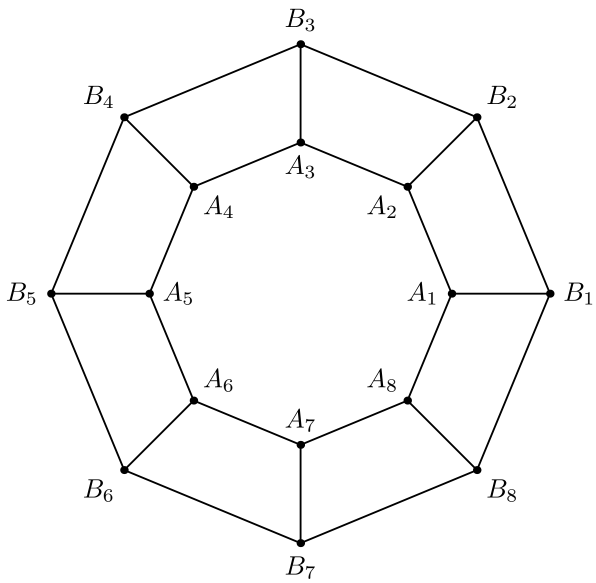
5. На вечеринку пришли n человек. Изначально у каждого было ровно три друга среди других людей, присутствующих на вечеринке. Во время вечеринки некоторые люди подружились, и в итоге в конце вечеринки у каждого стало ровно четыре друга среди остальных присутствующих. Определите все натуральные числа n, для которых возможна описанная ситуация. *Укажите все ответы, покажите, почему они подходят, и объясните, почему других нет.*

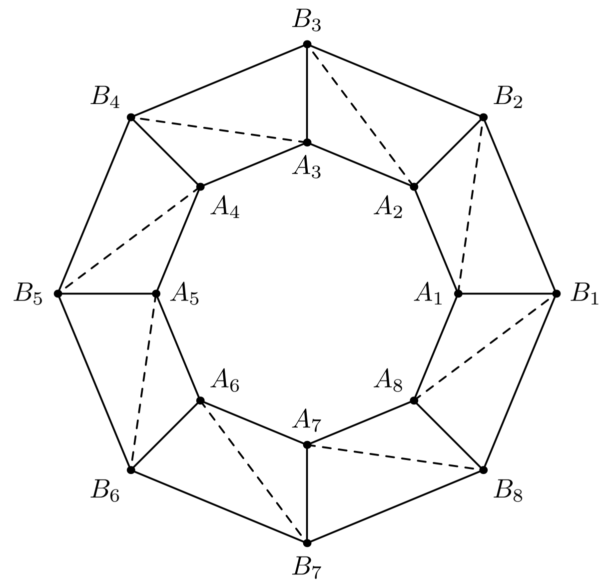
Ответ. Все четные $n \geqslant 6$.

Решение. *Оценка.* Заметим, что n должно быть четным. Действительно, общее количество знакомств для всех людей равно $3n$, но при этом каждое знакомство A–B учтено дважды: сначала для человека A, а потом для человека B. Поэтому для того, чтобы узнать количество пар знакомств, это число нужно поделить пополам. *Это утверждение обычно известно под названием «лемма о рукопожатиях».*

Кроме того, в конце вечеринки у каждого человека по четыре знакомых, поэтому необходимо, чтобы $n \geqslant 5$. С учетом того, что n — четное, это значит, что $n \geqslant 6$.

Пример. Разобьем $n = 2k$ людей на две группы по k человек: $A_1, \ldots, A_k$ и $B_1, \ldots, B_k$. Пусть до вечеринки были знакомы два цикла: $A_1A_2\ldots A_kA_1$ и $B_1B_2\ldots B_kB_1$, а также A_1 с $B_1, \ldots, A_k$ с B_k. Если на вечеринке познакомятся A_1 с B_2, A_2 с $B_3, \ldots, A_{k-1}$ с B_k и A_k с B_1, то получится требуемое. При $k = 8$ этот пример изображен на картинке. Новые знакомства показаны пунктирной линией.





6. Дина записала выражение, содержащее 19 дробей:

$$\frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{3}{4} * \frac{4}{5} * \ldots * \frac{18}{19} * \frac{19}{20}.$$

Она хочет заменить все звездочки на знаки арифметических действий («$+$», «$-$», «$\times$», «$\div$») так, чтобы получилось выражение, равное 1. Удастся ли ей это сделать? Скобки использовать нельзя. *Обоснуйте свой ответ.*

Первое решение (жюри). Да. Перемножив дроби $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$, Дина получит дробь $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Аналогично, она получит произведения $\frac{6}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{3}{4}$, $\frac{10}{11} \times \frac{11}{12} = \frac{5}{6}$, $\frac{12}{13} \times \ldots \times \frac{15}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, $\frac{16}{17} \times \frac{17}{18} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$ и $\frac{18}{19} \times \frac{19}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$. Остальные дроби Дина перемножать не будет. Теперь заметим, что у нее образовались по две дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ и $\frac{8}{9}$. Их можно взаимно уничтожить. Кроме того,

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10} - \frac{4}{5} = 1,$$

так что она сможет получить

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{9}{10} - \frac{5}{6} - \frac{3}{4} - \frac{8}{9} + \frac{9}{10} = 1.$$

Второе решение (один из участников). Заметим, что

$$\frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \ldots \times \frac{18}{19} \times \frac{19}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Из первых четырех дробей можно получить дробь $\frac{5}{4}$ следующим образом:

$$\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \div \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4}.$$

Осталось вычесть

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1.$$