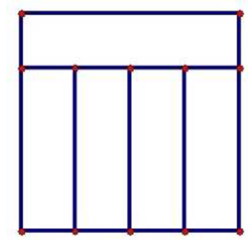
Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
7 класс, финальный тур. 7 февраля 2020 года. Решения задач.

1. Как разрезать квадрат со стороной 4 см на прямоугольники (не обязательно различные), с суммой периметров 42 см? *Достаточно привести один пример.*

Решение. Например, на рисунке четыре прямоугольника 1×3 имеют периметр 8 см, один прямоугольник 1×4 имеет периметр 10 см. Итого $4 \cdot 8 + 10 = 42$.



Возможны и другие решения. Например, разрезать квадрат на четыре прямоугольника 1×4, а один из них потом разрезать в любом месте вдоль короткой стороны (например, на два прямоугольника 1×2).

2. На математическом кружке Яне было предложено несколько простых и несколько сложных задач. За каждую решенную сложную задачу Яна получала 3 плюсика, за каждую простую — только 2. Более того, в конце кружка преподаватели удалили у Яны по одному плюсику за каждую нерешенную простую задачу. В итоге оказалось, что у Яны было решено 15 задач и осталось 25 плюсиков. Сколько простых задач было предложено Яне?

Ответ. 20 простых задач.

Первое решение. Добавим Яне по одному плюсику за каждую выданную простую задачу. После этого, она получит по 3 плюсика за каждую решенную задачу и не потеряет плюсики за нерешенные задачи. Было решено 15 задач, поэтому плюсиков будет $15 \cdot 3 = 45$. Значит мы добавили $45 - 25 = 20$ плюсиков, что равно количеству простых задач.

Второе решение. Количество нерешенных сложных задач не имеет значения, потому что от них в условии задачи ничего не зависит. Обозначим количество решенных простых задач за x, количество нерешенных простых задач за y, а количество решенных сложных задач за z. Тогда из условий получается следующая система уравнений:

$$x + z = 15, \quad 2x + 3z - y = 25.$$

Из этих уравнений необходимо выразить величину $x + y$. Имеем $z = 15 - x$, следовательно, $25 = 2x + 3(15 - x) - y = 45 - (x + y)$. Отсюда $x + y = 45 - 25 = 20$.

3. В каждой клетке квадратной таблицы 10×10 стоит крестик или нолик. Известно, что в каждой строке крестиков больше, чем ноликов. В каком наименьшем количестве столбцов может оказаться больше крестиков, чем ноликов?

Ответ. 2 столбца.

Решение. *Оценка.* В каждой строке крестиков больше чем ноликов, поэтому крестиков хотя бы 6, тогда во всей таблице крестиков хотя бы 60. Предположим противное: пусть имеется не более одного столбца, в котором крестиков больше. Общее количество крестиков в таблице тогда не более $10 + 9 \cdot 5 = 55$. Это противоречит тому, что их не меньше 60. Поэтому есть хотя бы два столбца, в которых крестиков больше.

Пример. Поставим в клетки первых двух столбцов крестики. В клетках остальных столбцов расставим крестики и нолики в шахматном порядке. Тогда в каждой строке будет ровно 6 крестиков и 4 нолика. В двух столбцах крестиков будет больше (ноликов там вообще нет), а в остальных столбцах крестиков и ноликов будет поровну.

4. Вдоль прямой дороги через равные промежутки расположены четыре города в следующем порядке: A, B, C, D. Барон Мюнхгаузен проехал из города A в город D нигде не поворачивая обратно. Он утверждает, что его средняя скорость между городами A и D была равна 20 км/ч, между городами A и C — 25 км/ч, между городами B и D — 30 км/ч. Могут ли его слова оказаться правдой?

Ответ. Нет, не могут.

Решение. Обозначим расстояние между соседними городами за S, время в пути на участках AB, BC и CD за a, b и c соответственно. Предположим, что барон не лжет. Тогда из условия задачи получаются следующие уравнения:

$$3S = 20(a+b+c), \quad 2S = 25(a+b), \quad 2S = 30(b+c).$$

Преобразуем их:

$$a+b+c = \frac{3}{20}S, \quad a+b = \frac{2}{25}S, \quad b+c = \frac{2}{30}S.$$

Сложим второе и третье равенство и вычтем из суммы первое, получим, что

$$b = \frac{2}{25}S + \frac{2}{30}S - \frac{3}{20}S = -\frac{1}{300}S.$$

Противоречие.

5. Имеется 100 гирь, на каждой из которых написан ее вес: 1 г, 2 г, 3 г, ..., 100 г. Известно, что не более, чем на 20 гирях вес написан неверно (то есть, каждая из этих гирь может весить сколько угодно, а остальные весят столько, сколько на них написано). Как определить при помощи чашечных весов, верный ли вес написан на гире с надписью 10 г? Весы показывают или равенство весов на чашах, или чашу, на которой находится более тяжелый вес. Количество взвешиваний не ограничено.

Первое решение. Будем называть гири в соответствии с их надписями, вне зависимости от реального веса. Выделим 49 пар гирь с разностью весов равной 10. Для этого упорядочим гири по весу и разобьем на 5 групп по 20 подряд идущих гирь. В каждой группе гири разбиваются на пары единственным образом. Пару (10; 20) рассматривать не будем. Для каждой пары гирь $(n; m)$, где $m = n + 10$, взвесим гирю m с одной стороны и гири 10 и n с другой стороны.

Гири с неверным весом (кроме гири в 10 г) могут присутствовать не более чем в 20 взвешиваниях. Если гиря в 10 г имела соответствующий вес, то хотя бы в

$49-20=29$ взвешиваниях все гири имели верный вес и весы показали равенство. Если гиря в 10 г имела другой вес, то хотя бы в $49-20=29$ взвешиваниях все гири, кроме одной, имели верный вес и весы показали неравенство чаш. Поэтому для определения корректности надписи 10 г достаточно посмотреть на преобладающий результат (равно или не равно) в описанных взвешиваниях.

Второе решение. Будем называть правильными гири, на которых вес написан верно, а неверными — гири, на которых вес написан неверно. Выберем любые числа, отличающиеся на 10, такие, что их можно набрать более, чем 40 способами непересекающимися группами. Например, выберем 42 пары гирь с весом $85=1+84=2+83=\ldots=42+43$ и 47 пар гирь с весом $95=1+94=2+93=\ldots=47+48$. Сначала сравним друг с другом все пары гирь с весом 85. Поскольку неверные гири могут присутствовать максимум в 20 парах, хотя бы в 22 взвешиваниях был правильный вес. Это означает, что тот вес, который встречается больше всех — верный. Таким образом, мы умеем получать вес в 85 граммов.

Теперь сравним друг с другом все пары гирь с весом 95. Аналогично, тот вес, который встречается чаще всех (минимум 27 раз) — верный. Таким образом, мы умеем получать вес в 95 граммов.

Выберем любую пару гирь (x,y) с верным весом $x+y=85$, не содержащую гирю в 10 г. Потом выберем любую пару гирь (a,b) с верным весом $a+b=95$, не содержащую гири в 10 г и гири x и y. Это возможно, так как таких пар минимум 27. Положим на одну чашу гири x, y и 10 г, а на другую — гири a и b. Вне зависимости от того, верный ли вес имеют гири x, y, a, b, на чашах сейчас лежат верные веса в 85 и 95 граммов и гиря 10 граммов. Если весы в равновесии, то гиря 10 г — правильная, если какая-то чаша перевесила — неверная.

6. Дан квадрат $ABCD$ со стороной $AB=1$. На сторонах AB и AD отметили точки M и N соответственно так, что $\angle ABN+\angle MCN+\angle MDA=90°$. Докажите, что периметр треугольника AMN меньше 2.

Решение. Заметим, что для фиксированной точки M точка N с описанным свойством восстанавливается не более чем одним способом. Действительно, при перемещении точки N ближе к точке A два угла из трех уменьшаются, а другой не изменяется, поэтому сумма уменьшается. При перемещении N ближе к D два угла увеличиваются, а другой не изменяется, поэтому сумма углов увеличивается.

Отметим точку N на AD так, что $AM=DN$. Покажем, что для построенной точки N условие задачи выполняется. Из этого будет следовать, что построенная точка совпадает с точкой N из условия. Действительно, из построения имеем равенство треугольников BCM и ABN, а также ADM и DCN. Следовательно $\angle ABN+\angle MCN+\angle MDA=\angle BCM+\angle MCN+\angle DCN=90°$.

Осталось оценить периметр треугольника AMN. Из построения видно, что $AN+AM=1$, поэтому $NM<1$ в силу неравенства треугольника. Тогда периметр $AN+AM+MN<1+1=2$.