Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан.
5 класс, заключительный этап. 7 февраля 2020 года
Решения задач.

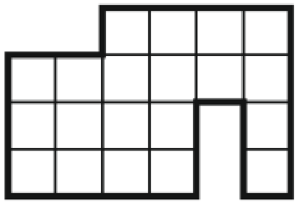
Каждая задача оценивается максимум в 7 баллов

1. Замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы равенство стало верным:

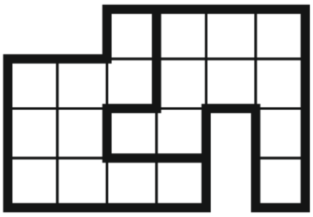
АБА × АБ × С = 2020

Достаточно привести один вариант решения.

Решение. 101 × 10 × 2 = 2020



2. Фигуру, изображенную на рисунке, разрежьте по линиям сетки на 2 равные части. *Части называются равными, если их можно совместить наложением.*

Решение. 

3. У Тимоши все игрушки разложены по четырем ящикам. В первом ящике лежит в три раза меньше игрушек, чем во втором, а в третьем – вдвое больше, чем в первом и втором вместе взятых. В четвертом ящике на 12 больше, чем в первом, но в четыре раза меньше, чем в третьем. Сколько всего игрушек во всех четырех ящиках?

Ответ. 168 игрушек.

Решение. Обозначим количество игрушек в первом ящике за x, тогда во втором ящике $3x$, а в третьем $2(x + 3x) = 8x$. В четвертом ящике с одной стороны на 12 больше, чем в первом, то есть $x + 12$, а с другой – в четыре раза меньше, чем в третьем, то есть $2x$. Получаем уравнение: $x + 12 = 2x$, а значит, $x = 12$. В четырех ящиках тогда соответственно: 12, 36, 96 и 24 игрушки, а всего 12 + 36 + 96 + 24 = 168 игрушек.

4. Четыре пятиклассника: Катя, Надя, Витя и Митя играли в монополию. Причем каждую партию они играли втроем, а один из четверых – отдыхал. Витя сыграл больше всех – 18 партий, а Катя – меньше всех – 6 партий. Сколько всего партий в монополию могли сыграть пятиклассники? *Найдите все варианты.*

Ответ. 18 или 19.

Решение. Пусть Надя сыграла x партий, а Митя – y партий. Тогда сумма $18 + 6 + x + y$ равна утроенному количеству партий, так как в каждой игре было три игрока. Всего было сыграно не меньше, чем партий, сыгранных Витей, то есть 18.

Пусть партий ровно 18, тогда $18 + 6 + x + y = 3 \times 18 = 54$, в этом случае, $x + y = 30$. Это возможно, если, например, Надя и Митя сыграли по 15 партий, каждый из них не играл 3 партии, и у Нади и Мити эти три партии не совпадают. Вместо них участвовала Катя – у нее как раз сыграно 6 партий.

Пусть теперь всего партий было 19, тогда $18 + 6 + x + y = 3 \times 19 = 57$, в этом случае, $x + y = 33$. Это возможно, если, например, Надя и Митя сыграли 16 и 17 партий соответственно. В одной из партий не участвовал Витя, в двух других – Митя, и в трех других – Надя. В этих шести партиях играла Катя.

Пусть теперь партий больше, либо равно 20. Тогда $18 + 6 + x + y \geq 3 \times 20 = 60$, и $x + y \geq 36$, а значит, хотя бы одно число из x и y не меньше 18 – но это противоречит условию, что Витя сыграл больше всех партий.

5. У придворного ювелира есть 10 бриллиантов, которые весят 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 19, 23, 24 карата. Он хочет использовать все бриллианты для украшения корон так, чтобы вес бриллиантов короны принцессы был в два раза меньше, чем у короны королевы. А вес бриллиантов в короне королевы в два раза меньше, чем в короне короля. Сможет ли он это сделать? *Распиливать бриллианты нельзя.*

Решение. Предположим, ювелиру удалось решить задачу. Тогда, если общий вес бриллиантов в короне принцессы равен N карат, то общий вес бриллиантов в короне королевы будет $2N$ карат, а в короне короля — еще вдвое больше, то есть, $4N$ карат. Тогда общий вес всех бриллиантов должен равняться $N + 2N + 4N = 7N$ карат. С другой стороны, общий вес всех бриллиантов равен $4 + 5 + 6 + 9 + 10 + 11 + 14 + 19 + 23 + 24 = 125$ карат. Это число не делится на 7, следовательно, решить задачу ювелир не сможет.

6. В кабинете было 13 детей: мальчики и девочки. Первый сказал: «Среди нас есть хотя бы 1 мальчик». Второй: «Среди нас есть хотя бы 1 девочка». Третий: «Среди нас есть хотя бы 2 мальчика». Четвертый: «Среди нас есть хотя бы 2 девочки». И так далее. Одиннадцатый: «Среди нас есть хотя бы 6 мальчиков». Двенадцатый: «Среди нас есть хотя бы 6 девочек». Тринадцатый ничего не сказал. Сколько в классе было девочек и мальчиков, если известно, что все девочки сказали правду, а мальчики сказали неправду?

Ответ. 10 девочек и 3 мальчика.

Первое решение (последовательное раскручивание)

Ситуация, когда все 13 пятиклассников — девочки, невозможна, потому что тогда все 12 высказываний должны быть правдой, а 6 из них говорят о том, что мальчики есть. Аналогично, невозможна ситуация, когда все 13 — мальчики, потому что тогда все высказывания должны быть ложными, а 6 из них говорят правду о том, что мальчики есть.

Итак, среди пятиклассников точно есть и мальчики, и девочки. Тогда высказывания №1 и №2 правдивы, следовательно, их произносят девочки. Поэтому девочек хотя бы две, и высказывание №4 — правда, поэтому его тоже произносит девочка. Значит, их хотя бы три. Тогда высказывание №6 — правда, и аналогично получаем, что девочек хотя бы четыре. Тогда высказывание №8 — правда, поэтому девочек хотя бы 5, далее высказывание №10 — правда, поэтому девочек хотя бы 6, и, наконец, высказывание №12 — правда, поэтому девочек хотя бы 7.

Теперь рассмотрим высказывание №3. Если оно является ложным, то мальчик всего один. Но тогда высказывания №5, №7, №9, №11 также все являются ложными, но ложь может сказать только один мальчик. Следовательно, высказывание №3 — правда, и его тоже произносит девочка, поэтому их минимум восемь, а мальчиков, в свою очередь, минимум двое.

Далее, рассмотрим высказывание №5. Если оно является ложным, то мальчиков ровно двое. Но тогда высказывания №7, №9, №11 являются ложными, но мальчиков на них не хватает. Следовательно, высказывание №5 — тоже правда, и его тоже произносит девочка, поэтому их минимум девять, а мальчиков, в свою очередь, минимум трое.

Мы уже определили 12 человек, осталось выяснить, кем может быть еще один. Если это девочка (то есть, девочек — 10, а мальчиков — 3), то ложных высказываний может быть максимум три (если последний, промолчавший, пятиклассник — мальчик, то их будет два). Но высказывания №7, №9, №11 точно являются ложными, поэтому мальчики произносят их и только их. Все остальные высказывания обязаны быть правдой, но это так и есть. Такая ситуация возможна, и промолчавший пятиклассник в этом случае — девочка.

Если же мальчиков четверо, а девочек — девять, то правдивы высказывания под номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12. Но их уже десять, и девочек не хватает. Такая ситуация невозможна.

Второе решение (оценки).

Покажем, что мальчиков как минимум трое. Действительно, если их максимум двое, то высказывания под номерами 5, 7, 9, 11 — ложные, но в кабинете нет четверых мальчиков, которые могли бы их произнести.

Покажем, что девочек минимум шесть. Действительно, если их не больше пяти, то мальчиков минимум восемь и все шесть высказываний про мальчиков — правда, но в кабинете нет шестерых девочек, чтобы их произнести.

Из этих фактов следует, что утверждения под номерами 2, 4, 6, 8, 10, 12, а также 1, 3, 5 — правдивы. Поэтому девочек не меньше, чем девять. Дальше продолжаем, как в двух последних абзацах первого решения.