Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
6 класс, финальный тур. 7 февраля 2020 года. Решения задач.

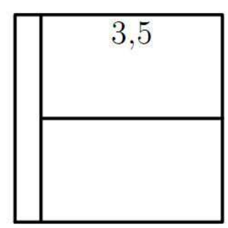
1. У Николая есть семь карточек, на которых напечатаны цифры от 1 до 7. Он хочет составить из них два числа (использовав все карточки) так, чтобы сумма всех этих чисел читалась справа налево так же, как и слева направо. Числа могут содержать любое количество знаков. Сможет ли он сделать это?

Решение. Есть много способов получить 7777, например, $7456 + 321 = 7777$. Существует много других примеров, дающих другие результаты, например, $5761+234 = 5995$.

2. На какое наименьшее количество прямоугольников можно разрезать квадрат со стороной 4 см так, чтобы сумма периметров этих прямоугольников была равна 31 см? Длины сторон прямоугольников могут быть любыми положительными числами. *Приведите пример и докажите, почему меньшее значение невозможно.*

Ответ. 3.

Решение. Если разрезать квадрат на два прямоугольника, то разрез будет иметь длину 4 см. При подсчете суммы периметров этих двух прямоугольников периметр квадрата будет учтен один раз, а дина разреза — дважды. Поэтому вне зависимости от места расположения разреза сумма периметров двух прямоугольников будет равна $16 + 2 \cdot 4 = 24$. Следовательно, необходимо как минимум три прямоугольника. Один из двух нужно разрезать на две части, и суммарный периметр должен увеличиться на 7. Для этого достаточно, чтобы ширина разрезаемого прямоугольника была равна 3,5 см. Это соображение позволяет легко построить пример. См. рисунок.



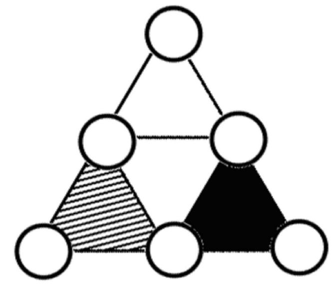
3. Петя, Вася и Толя поехали на велосипедах с дачи на озеро. Каждый из них едет со своей постоянной скоростью. Когда Петя проехал треть расстояния, Вася проехал только четверть расстояния. Когда Вася проехал треть расстояния, Толе оставалось проехать четверть расстояния. Какую часть расстояния проехал Петя в тот момент, когда Толя проехал треть расстояния?

Ответ. $16/81$.

Решение. Пусть скорость Пети равна x, скорость Васи равна y, скорость Толи равна z (любых единиц измерения, например, км/ч). Из первого условия следует, что $\frac{x}{y} = \frac{1/3}{1/4} = \frac{4}{3}$, то есть, $x = \frac{4}{3}y$ или $y = \frac{3}{4}x$. Из второго условия следует, что $\frac{z}{y} = \frac{3/4}{1/3} = \frac{9}{4}$, то есть, $z = \frac{9}{4}y$.

Подставим сюда выражение для y и получим $z = \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{27}{16}x$. Отсюда следует, что когда Толя проедет $1/3$ расстояния, Петя проедет в $16/27$ раз меньше, то есть, $16/81$ расстояния до озера.

4. Аня хочет расставить в шесть кружочков на рисунке различные натуральные числа так, чтобы сумма трех чисел в вершинах черного треугольника была вдвое больше суммы остальных трех чисел, а сумма трех чисел в вершинах заштрихованного треугольника — вчетверо больше суммы остальных трех чисел. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всех шести кружочках? *Приведите пример и объясните, почему меньшее значение невозможно.*

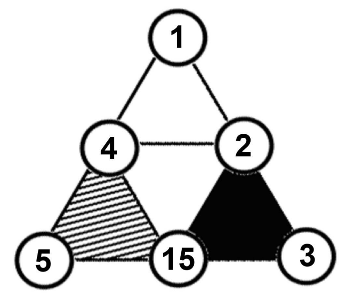


Ответ. 30.

Решение. Пусть сумма трех чисел вне заштрихованного треугольника равна A, сумма трех чисел вне черного треугольника равна B, а сумма всех шести чисел равна S. Тогда сумма чисел в вершинах заштрихованного треугольника равна $4A$, а сумма трех чисел в вершинах черного треугольника равна $2B$. Тогда сумма всех шести чисел равна $S = 5A = 3B$. Следовательно, S делится на 3 и на 5, но тогда S кратно 15.

Наименьшее такое число — $S = 15$. Но в этом случае $A = 3$. Наименьшее число, которое можно представить в виде суммы трех различных натуральных чисел — это сумма наименьших трех различных натуральных чисел: $6 = 1+2+3$. Поэтому этот случай невозможен.

Следующее такое число — $S = 30$, тогда $A = 6$, $B = 10$. Отсюда сразу следует, что три числа вне заштрихованного треугольника равны 1, 2 и 3. Число 10 можно представить в виде суммы трех различных натуральных чисел, одно из которых равно 1, 2 или 3, а два других — нет, а именно, $10 = 1 + 4 + 5$. Тогда последнее число должно быть равно 15, и пример построен. См. рисунок.



5. У Миши есть набор из 16 фигурок от настольной игры. Каждая фигурка обладает четырьмя признаками — она может быть: 1) круглой или квадратной; 2) черной или белой; 3) тонкой или толстой; 4) иметь дырку посередине или не иметь. Все фигурки в наборе различны. Сможет ли Миша выложить эти 16 фигурок по кругу так, чтобы любые две соседние фигурки имели ровно два одинаковых признака?

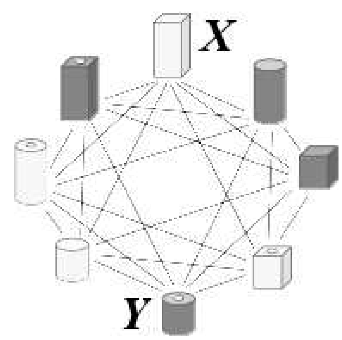
Ответ. Нет.

Первое решение. Закодируем каждую фигурку набором из четырех нулей и единиц: если соответствующий признак у нее первого из двух типов — поставим на месте его номера 1, иначе — 0. Тогда все фигурки окажутся закодированы всеми 16 возможными наборами от 0000 до 1111 (например, круглая белая толстая фигурка с дыркой кодируется набором 1001). Заметим, что если две фигурки имеют ровно два одинаковых признака, то на соответствующих местах их кодировок стоят одни и те же цифры, а на местах двух оставшихся признаков — противоположные).

Покажем, что отсюда следует, что суммы цифр в кодировках этих фигурок имеют одинаковую четность. Действительно, суммы на тех двух местах, где признаки совпадают, просто равны. А суммы на двух оставшихся местах составлены из чисел с противоположными четностями, поэтому отличаются на четное число. (Возможны четыре варианта: 1) 00 и 11; 2) 11 и 00 — в них суммы отличаются на 2 и 3) 10 и 01; 4) 01 и 10 — в них суммы просто равны). Тем самым, ни одна из восьми фигурок с четной суммой чисел в кодировке (0, 2 или 4) не может стоять рядом ни с одной из восьми фигурок с нечетной суммой чисел в кодировке (1 или 3). Но расставить фигурки по кругу так, чтобы никакие две такие фигурки не оказались рядом, невозможно. Действительно, предположим что это получилось сделать. Выберем любую фигурку A с четной суммой и любую фигурку B с нечетной суммой. Они не могут стоять рядом. Тогда начнем двигаться от фигурки A в направлении фигурки B по часовой стрелке. Каждый раз мы должны оказываться в фигурке с четной суммой, а в итоге должны прийти в фигурку с нечетной суммой. Значит, где-то по дороге четность поменялась, но мы доказали, что это невозможно.

Второе решение (то же самое другими словами). Выберем любую фигурку X (например, квадратную, белую, толстую и без дырки). Есть ровно шесть фигурок, которые могут стоять с ней рядом. Действительно, для подсчета их количества нужно выбрать два признака из четырех, в которых они отличаются, а это можно сделать 6 способами. Заметим, что противоположная фигурка Y (круглая, черная, тонкая и с дыркой) может стоять рядом с любой из тех же шести фигурок. Но у каждой фигурки ровно шесть возможных соседов, поэтому фигурка Y может стоять рядом *только* с какой-то из этих шести, и больше ни с какой другой.

Кроме того, все эти 8 фигур (X, Y и их 6 соседей) таковы, что вместе с каждой фигуркой в этой группе содержится и ее противоположная. Отсюда следует (см. рисунок), что фигурки из этой группы могут стоять рядом только с другими фигурками из этой же группы. Следовательно, расставить все 16 фигурок требуемым образом невозможно.



6. Имеется 10 гирь, на каждой написан ее вес — 1 г, 2 г, 3 г, ..., 9 г, 10 г. Известно, что на каких-то двух гирях вес написан неправильно (то есть, каждая из этих гирь может весить сколько угодно, а остальные весят столько, сколько на них написано). При помощи чашечных весов определите, верный ли вес написан на гире с надписью 5 г. Весы показывают или равенство весов на чашах, или чашу, на которой находится более тяжелый вес. Количество взвешиваний не ограничено.

Решение. Будем называть правильными гири, на которых вес написан верно, а неверными — гири, на которых вес написан неверно. Возьмем пять групп гирь — четыре пары 1 г и 9 г, 2 г и 8 г, 3 г и 7 г, 4 г и 6 г, и одну гирю в 10 г, и сравним их все попарно между собой (на это потребуется 10 взвешиваний). После этого мы узнаем, какие из этих групп весят одинаково. Как минимум три группы будут весить одинаково, поскольку неверный вес может встретиться максимум в двух группах. Следовательно, тот вес, который встречается хотя бы три раза, и есть вес 10 граммов. (При этом мы не можем утверждать, что все гири в группах весом 10 граммов — верные, так как, например, одна из этих групп может оказаться состоящей из двух неверных гирь: $7{,}9 + 2{,}1 = 10$).

Разберем все возможные случаи.

1) Этот вес встречается 5 раз (все группы весят одинаково). Тогда две неверные гири обязательно в одной из пар (если в паре ровно одна неверная гиря, она не может показывать правильный вес). Значит, гиря с надписью 5 г — правильная, так как она не участвует в этих группах.

2) Этот вес встречается ровно 3 раза (а две группы от него отличаются). Тогда эти две группы содержат неверные гири, значит гиря с надписью 5 г снова правильная.

3) Этот вес встречается ровно 4 раза, а одна группа отличается от него.

а) Если отличается гиря с надписью в 10 г, то все 4 пары — правильные и гиря с надписью 5 г — неправильная.

б) Если отличается какая-то пара, то возможна ситуация, когда в ней одна или две неверные гири. Остальные три пары — точно правильные (иначе неверные гири есть в двух парах и тогда должен иметь место случай 2). Рассмотрим гири с надписями 1 г, 2 г, 3 г, 4 г. Одна из них содержится в отличающейся паре, а три остальные — в правильных, поэтому они точно правильные. Из этих трех есть две, дающие в сумме 5 (либо $1 + 4$, либо $2 + 3$). Возьмем их и сравним с гирей с надписью 5 г. Если вес одинаковый, то гиря с надписью 5 г — правильная, если нет — неправильная.