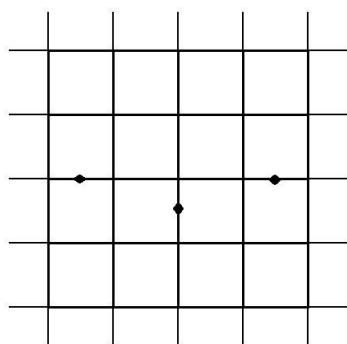
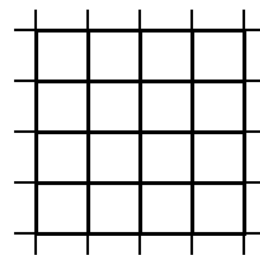


Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан

5 класс, финальный тур. 15 февраля 2025 года. Решения задач

1. На рисунке представлен план города, улицы которого делят город на 16 одинаковых квадратных кварталов. Сторона каждого квартала равна 200 метров. Покажите, как на улицах **вне перекрестков** расположить три полицейских участка так, чтобы от любого перекрестка можно было добраться до участка, проехав не более 500 метров вдоль улиц. *Достаточно привести один пример.*



Решение. Одна из возможных расстановок показана на рисунке. Точками обозначены полицейские участки, они расположены в точности посередине между соседними перекрестками.

2. Мама дала Вите 600 рублей на покупку рюкзака. Не зная об этом, папа дал Вите 680 рублей на покупку рюкзака. Купив рюкзак, Витя купил себе еще и торт к началу учебного года. Оказалось, что сдачи осталось в пять раз меньше, чем рассчитывала мама, и в шесть раз меньше, чем рассчитывал папа. Сколько рублей стоил торт? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 1000 рублей.

Решение. Пусть у Вити осталось x рублей после покупок. Тогда, поскольку мама рассчитывала на сдачу $5x$ рублей, а папа — на $6x$, то папа дал Вите на x рублей больше. Отсюда следует, что $x = 680 - 600 = 80$. Тогда мама ожидала получить сдачу $5 \cdot 80 = 400$ рублей. Следовательно, рюкзак стоит $600 - 400 = 200$ рублей. Поэтому торт стоит $600 + 680 - 200 - 80 = 1000$ рублей.

3. Шесть ребят пошли в театр. Изначально они заняли места в форме прямоугольника 2×3 , уместившись в двух рядах. После антракта они обнаружили, что их места заняты. Расстроенные дети нашли шесть мест друг за другом и расселись на них. Алла: “Опять этот Ефим сидит прямо передо мной! Ничего не видно.” Берта: “Зато теперь между мной и тобой никто не сидит!” Вагиз: “Эй вы, сзади, хватит там болтать! Мешаете!” Гриша: “Кто бы говорил! Сам до этого сидел и болтал прямо позади меня.” Денис: “Опять я сижу рядом с Гришей.” Сидящая прямо перед Гришей бабушка обернулась и сказала ему, что в театре нельзя так вести себя. После этого дети замолчали. Как располагались дети до и после антракта? *Обоснуйте свой ответ.*

Е	Г	Д
А	В	Б

Д	Г	Е
Б	В	А

Ответ. До антракта —

Е	Г	Д
А	В	Б

 или

Д	Г	Е
Б	В	А

, после антракта — ГДВЕАБ.

Решение. Будем обозначать посадку детей после антракта по первым буквам слева направо, слева – места, которые ближе к сцене.

Из утверждения Аллы следует, что и до, и после антракта Ефим сидел перед Аллой (порядок будем обозначать по буквам: ЕА). Из утверждения Берты следует, что после антракта порядок детей был ЕАБ, а до антракта Алла и Берта сидели в одном ряду через

Е		
А		Б

или

		Е
Б		А

. По утверждению Гриши, Гриша и Вагиз сидели друг за другом в одном ряду, поэтому рассадка остальных детей до антракта могла быть только такой:

Е	Г	Д
А	В	Б

или

Д	Г	Е
Б	В	А

После антракта, по утверждению Дениса, порядок ГД. Поскольку перед Гришей сидит бабушка, то Гриша самый первый, тогда порядок либо ГДЕАБВ, либо ГДВЕАБ. Но первый случай не подходит под утверждение Вагиза.

4. В однокруговом футбольном турнире принимало участие несколько команд. За победу в матче начислялось 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. После завершения турнира судейская коллегия для каждой команды посчитала **произведение** набранных ей очков во всех матчах и наградила первое, второе и третье места. Могло ли такое случиться, что команда, набравшая наибольшую **сумму** очков, оказалась не награждена? *Обоснуйте свой ответ.*

	А	Б	В	Г	Е	Ж	З
А		1	1	3	3	1	1
Б	1		1	1	1	3	1
В	1	1		1	1	1	1
Г	0	1	1		3	3	3
Д	0	1	1	0		3	3
Е	1	0	1	0	0		3
Ж	1	1	1	0	0	0	

Ответ. Могло.

Решение. Например, на турнирной таблице на рисунке команды А, Б, В соответственно заняли I, II и III места по произведению набранных очков, но команда Г имеет наибольшую сумму очков.

5. Регина начала читать книгу. После того, как она заканчивает читать очередную страницу, она находит на ней какое-нибудь пока еще не обведенное слово и обводит его карандашом. Дальше она либо начинает читать следующую по номеру страницу, либо начинает заново перечитывать предыдущую по номеру страницу. Сегодня Регина закончила читать книгу на последней странице. Может ли оказаться так, что сейчас на пятнадцатой странице — 17 пометок, на одиннадцатой, четырнадцатой и восемнадцатой — по 11 пометок, на двенадцатой и семнадцатой — по 19, а на тринадцатой и шестнадцатой — по 13? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Нет.

Решение. Перед прочтением пятнадцатой страницы Регина могла читать только четырнадцатую или шестнадцатую страницы. Аналогично, перед прочтением семнадцатой страницы, Регина могла читать только шестнадцатую или восемнадцатую страницу, причем каждое прочтение шестнадцатой страницы предшествовало прочтению одной из страниц №15 или №17. Отсюда следует, что прочтений пятнадцатой и семнадцатой страниц не могло быть больше, чем прочтений четырнадцатой, шестнадцатой и восемнадцатой страниц вместе взятых. Но прочтений пятнадцатой и семнадцатой страниц было $17 + 19 = 36$, а прочтений четырнадцатой, шестнадцатой и восемнадцатой страниц было всего $11 + 13 + 11 = 35$. Следовательно, такого произойти не могло.

6. Олег взял длинный бумажный клетчатый прямоугольник шириной в одну клетку, и выписал на нём, начиная с левого края, семь последовательных натуральных чисел в каком-то порядке. В каждой клетке оказалась выписана ровно одна цифра. После этого он склеил оба края шириной 1 и передал получившееся кольцо Рустему. Какое наименьшее число клеток могло быть в прямоугольнике, если Рустем смог прочитать на кольце числа 2508, 4887, 72538, 528725, 548724? *Необходимо не только привести пример, сколько клеток могло быть и какие числа там нужно расставить, но и обосновать, почему меньшим количеством клеток обойтись нельзя.*

Ответ. 35.

Решение. Пример, в котором 35 клеток может хватить: 87248, 87249, 87250, 87251, 87252, 87253, 87254. Числа могут быть записаны в этом порядке.

Допустим, что Олег смог использовать меньше, чем 35 клеток. Тогда все его числа имеют не больше пяти цифр, причем есть числа, в которых цифр меньше пяти. Также все числа Олега имеют хотя бы две цифры, так как «0» в последовательности 2508 должен относиться к числу, которое хотя бы 50.

Покажем, что все числа Олега должны иметь одинаковое количество цифр. Действительно, в противном случае будет происходить переход в разряде десятков и единиц, и тогда в каждом числе в разряде десятков будет цифра 0 или 9. Кроме того, будет хотя бы одно число, начинающееся на 1. Но в таком случае не может образоваться последовательность цифр 528725 — в ней нет ни нулей, ни девяток, ни единиц.

Все числа Олега не могут быть двузначными, иначе из последовательности 548724 должны быть присутствовать либо числа 48 и 72, либо числа 54, 87 и 24, что невозможно, так как среди них в обоих случаях есть пара чисел, отличающихся больше, чем на 6.

Все числа Олега не могут быть трехзначными, иначе одно из трехзначных чисел поместится целиком в 548724. Но, по той же причине, что и выше, ни одна из пар 548 и 724, 487 и $24x$, 872 и $4xy$ не подходит (здесь символами x , y обозначены неизвестные последующие цифры в соответствующем числе).

Предположим, что все числа Олега — четырехзначные. Тогда в последовательности $abc548724xyz$ могут случиться только следующие варианты разбиения на четырехзначные числа: 1) 5487 и $24xy$, 2) $bc54$ и 8724, 3) $c548$ и $724x$, 4) 4872 и $4xyz$. Первые три варианта невозможны, так как числа отличаются больше, чем на 6. В последнем случае, с участием числа 4872 у Олега все числа в разряде тысяч должны содержать «4» (потому что они обязаны лежать в интервале от 4866 до 4878). Но из таких чисел невозможно получить последовательность 72538, так как в ней нет ни одной четверки.