

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
7 класс, финальный тур. 15 февраля 2025 года. Решения задач

1. По кругу стоит 20 натуральных чисел. Любые два соседних числа отличаются друг от друга на 1. Известно, что какое-то число встречается не меньше, чем три раза. Верно ли, что найдется число, которое встречается хотя бы четыре раза? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. В пять раз. Нет, неверно.

Решение. Числа можно расставить, например, так: 2, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 9, 10, 9, 8, ..., 4, 3.

2. Даны четыре числа. Известно, что среднее арифметическое первых трех чисел на 4 больше четвертого числа. Среднее арифметическое первого, второго и четвертого чисел на 3 больше третьего числа. Среднее арифметическое первого, третьего и четвертого чисел на 2 больше второго числа. На сколько среднее арифметическое второго, третьего и четвертого числа меньше первого числа? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Меньше на 9.

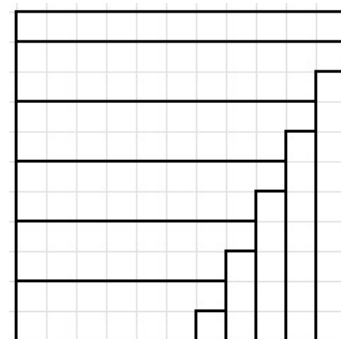
Решение. Пусть даны числа a, b, c, d . По условию дано $\frac{a+b+c}{3} = d + 4$, $\frac{a+b+d}{3} = c + 3$ и $\frac{a+c+d}{3} = b + 2$. Пусть $\frac{b+c+d}{3} = a + x$. Складывая все четыре равенства и сокращая на $a + b + c + d$, получим $0 = 4 + 3 + 2 + x$, откуда $x = -9$.

3. Дан набор из 45 прямоугольников: 1×1 , 1×3 , 1×5 , ..., 1×87 , 1×89 . Какое наименьшее количество прямолинейных разрезов необходимо сделать так, чтобы из получившихся частей можно было сложить один квадрат без пропусков и наложений? *Необходимо не только привести пример, как разрезать прямоугольники, но и обосновать, почему меньшим количеством разрезов обойтись нельзя.*

Ответ. 22.

Решение. Оценка. Сумма площадей равна $1 + 3 + 5 + \dots + 89 = 2025 = 45^2$. Следовательно, все прямоугольники со сторонами от 47 до 89 надо разрезать. Поэтому количество разрезов не менее 22.

Пример. Схематичное изображение квадрата 11×11 дано на рисунке. Квадрат 45×45 складывается аналогично.

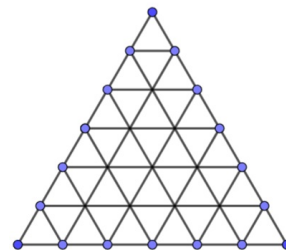


4. Равносторонний треугольник со стороной 6 разбит на 36 треугольничков со стороной 1 (см. рисунок). Отметьте наименьшее количество сторон получившихся треугольничков (т.е., отрезков длины 1) так, чтобы никакие два из них не имели общих концов и больше нельзя было отметить ни одной стороны, соблюдая это условие. *Необходимо не только привести пример, как отметить стороны, но и*

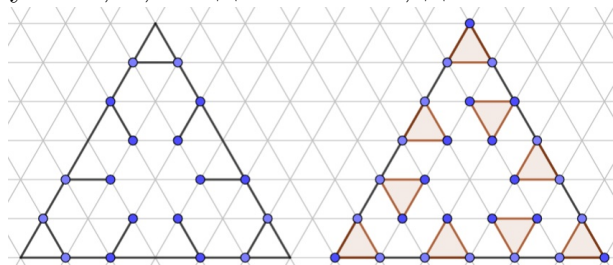
обосновать, почему меньшим количеством сторон обойтись нельзя.

Ответ. 9 отрезков.

Решение. *Пример.* На первом из рисунков снизу отмечены 9 отрезков, удовлетворяющих условию.



Оценка. На втором рисунке отмечено 9 треугольников. Каждый из них должен содержать хотя бы два конца одного или разных отрезков (иначе в нем можно провести еще один отрезок). Таким образом, всего должно быть отмечено минимум 18 узлов, а, следовательно, должно быть проведено хотя бы $18/2 = 9$ отрезков.



5. Петя выписывает все трехзначные номера от 000 до 999. После этого Вася дополняет каждый из написанных номеров справа ровно тремя цифрами. Какое наибольшее количество точных квадратов может обеспечить Вася? Все ведущие нули в начале Васиных чисел убираются. *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 750.

Решение. Разница между соседними точными квадратами равна $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. Заметим, что разница между соседними квадратами в ряду $0^2, 1^2, \dots, 500^2$ не превосходит 1000, так как если $n+1 \leq 500$, то $2n+1 \leq 999$. Так как $1^2 = 1$ и $500^2 = 250000$, отсюда следует, что для каждого номера от 000 до 250 существует какой-то точный квадрат, начинающийся с этих трех цифр. Этих номеров всего будет 251.

Из той же формулы следует, что разность между соседними квадратами в ряду $500^2, 501^2, \dots, 999^2$ уже больше 1000 (так как если $n+1 \geq 501$, то $2n+1 \geq 1001$). Отсюда следует, что каждый из квадратов от 501^2 до 999^2 начинается с уникальной тройки цифр. Их всего 499, и они обеспечивают еще 499 номеров, которые можно дополнить до квадратов.

Таким образом, ответ в задаче составляет $251 + 499 = 750$ квадратов.

6. Дан квадрат $ABCD$. Точки P, Q, R таковы, что D является серединой отрезка AP , C — середина отрезка DQ , A — середина отрезка BR . Докажите, что три окружности: одна — проходящая через точки B, C, P , другая — проходящая через точки A, C, Q , и третья — проходящая через точки B, D, R , все проходят через одну точку.

Решение. Введем квадратную решетку так, чтобы квадрат $ABCD$ являлся квадратом 2×2 на этой решетке. Кроме того, введем обозначения точек, как

показано на рисунке. Покажем, что точка X — искомая точка пересечения трех окружностей.

Действительно, окружность, проходящая через точки B, C, P , проходит через точку X так как ее центр (точка N) равноудалена от всех точек B, C, P, X . Окружность, проходящая через точки A, C, Q , проходит через X , так как ее центр (точка M) равноудалена от всех точек A, C, Q, X . Окружность, проходящая через точки B, D, R , тоже проходит через X , так как ее центр (точка A) равноудалена от всех точек B, D, R, X .

