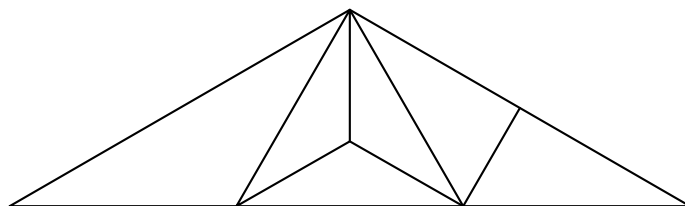
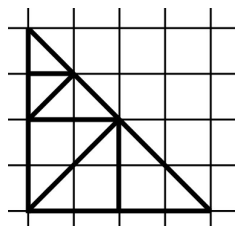


Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
6 класс, финальный тур. 15 февраля 2025 года. Решения задач

1. Разрежьте какой-нибудь треугольник на шесть меньших треугольников, три из которых равны друг другу, еще два — равны между собой, но не равны первым трем, а последний — не равен ни одному из остальных. *Достаточно привести один пример.*

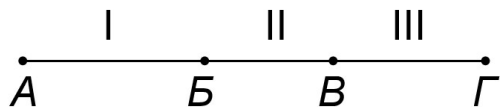
Решение. На рисунках показаны два решения. Одно — с прямоугольными треугольниками, другое — с равносторонним.



2. Автомобиль едет из пункта A в пункт G . Первую часть пути — от пункта A до пункта B он проезжает втрое дольше, чем последнюю — от пункта B до пункта G . При этом на путь от B до G он тратит вдвое меньше времени, чем на путь от A до B . Во сколько раз время пути от A до G больше, чем от B до G ? Скорость автомобиля может меняться на всем протяжении пути. *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. В пять раз.

Решение. Пусть на последний участок (III) автомобиль затратил T минут. Тогда на первый участок (I) он затратил $3T$ минут. Обозначим время, потраченное на второй участок (II), за K . Тогда второе условие задачи означает, что $3T + K = 2(T + K)$. Раскрыв скобки, получим $K = T$. Следовательно, на весь путь автомобиль затратил время $3T + T + T = 5T$, и это в пять раз больше, чем время T , потраченное на второй участок.



3. Олимпиада по математике проводится в два дня, каждый день предлагается одинаковое число задач, пронумерованных от 1 до 12. Оказалось, что у каждого школьника количества решенных им задач в первый и второй день отличаются на 1. При этом для каждого номера от 1 до 12 количества школьников, решивших задачи с этим номером в разные дни, отличаются на 2. Могло ли так оказаться, что в олимпиаде участвовало ровно 2025 школьников? *Обоснуйте свой ответ.*

Решение. Посчитаем число задач, решенных всеми участниками. Заметим, что для каждого участника число решенных им за два дня задач нечетно (так как равно $k + (k + 1) = 2k + 1$). Однако, каждую пару задач с одинаковыми номерами решили четное число школьников: $m + (m + 2) = 2m + 2$. Это означает, что общее

число задач, решенное всеми школьниками — четно. Отсюда следует, что и число участников олимпиады тоже четно — ведь каждый вкладывает в общую сумму нечетное число задач.

4. В сериале, состоящем из 12 серий, участвует несколько персонажей. Нет персонажа, который встречается во всех сериях. Известно, что в любых шести сериях есть общий персонаж. Какое наименьшее количество персонажей может быть в таком сериале? *Необходимо не только привести пример, сколько персонажей может быть и как они участвуют в сериях, но и обосновать, почему меньшим количеством персонажей обойтись нельзя.*

Ответ. 7.

Решение. *Оценка.* Докажем, что шесть или меньше персонажей быть не может. Действительно, в этом случае можно для каждого персонажа рассмотреть серию, в которой его нет. Всего получится *не более* шести серий (какие-то два персонажа могут отсутствовать в одной и той же серии). Если таких серий меньше шести, то добавим к ним любые другие серии так, чтобы их стало шесть. В результате мы получим шесть серий без общего персонажа.

Пример для семи персонажей: первый участвует во всех сериях, кроме первой, второй персонаж — во всех, кроме второй, и так далее, седьмой — во всех, кроме седьмой. В последних пяти сериях участвуют все. Легко видеть, что этот пример подходит. Последние пять серий вообще не влияют на условие. А из первых семи серий любые шесть имеют общего персонажа — того, кто отсутствует в оставшейся.

5. Барон Мюнхгаузен утверждает, что придумал натуральное число такое, что если заменить в нем одну любую цифру на любую другую, то результат всегда окажется составным числом. Прав ли барон? Например, из числа 341 можно получить числа 241, 331 и 347 и все они — простые. Число называется составным, если у него есть делители кроме него самого и единицы. Самую первую слева цифру менять на нуль нельзя. *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Прав.

Решение. Напомним, что символом $n!$ обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n . Барон мог придумать, например, число $19! + 10$.

Покажем, как придумать этот пример, и заодно поясним, почему он подходит. Обозначим это число буквой N . Если последней цифрой числа N будет нуль, то оно будет делиться на 10 (а поэтому на 2 и на 5), и, следовательно будет составным. Тогда замена любой цифры, кроме последней, сохранит это свойство. Соответственно, останется только вопрос, что будет, если заменить последний нуль на какую-то другую цифру k . Но это будет равносильно тому, что прибавить эту цифру к числу N . Поэтому нужно лишь обеспечить, чтобы все числа $N + 1$, $N + 2$, \dots , $N + 9$ были составными. Сделать числа $N + 2$, \dots , $N + 9$ составными несложно — достаточно потребовать, чтобы N делилось на все натуральные числа от 2 до

9. Чтобы решить проблему с числом $N + 1$, представим N в виде $M + 10$. Тогда $N + 1 = M + 11$, \dots , $N + 9 = M + 19$. Теперь потребуем, чтобы число M делилось на все натуральные числа от 11 до 19. Простейшим примером будет число $M = 19!$, но подойдет и $M = \text{НОК}(11, 12, \dots, 19) = 232792560$, оно тоже будет кратно 10.

6. У Пумбы есть пять монет. Одна из них — фальшивая, и Тимон знает, какая именно. Пумба может выбрать три монеты, и отдать одну из них Тимону. После этого Тимон ответит, есть ли среди двух других выбранных монет фальшивая. Если Тимон получит настоящую монету, то скажет правду, а если фальшивую — то солжет. Сможет ли Пумба определить фальшивую монету, задав не более трех вопросов? После того, как какая-либо монета досталась Тимону, про нее все еще можно спрашивать, но отдавать нужно каждый раз новую монету. *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Сможет.

Решение. Покажем, как определить фальшивую монету за три вопроса.

Первым вопросом покажем на монеты A , B , C и отдадим Тимону монету A . Две оставшиеся монеты обозначим буквами D и E .

На первый вопрос Пумба получит ответ, что среди B и C либо есть фальшивая монета, либо нет.

Случай 1. Получен ответ, что среди B и C есть фальшивая монета. Если у Тимона настоящая монета, то фальшивая находится среди B и C . Если же у Тимона фальшивая монета, то все остальные — настоящие. В обоих случаях монеты D и E — настоящие. Пумба отдаст монету D Тимону, который гарантированно скажет правду. Вторым вопросом он снова спросит про B и C . Если Тимон ответит, что среди них нет фальшивой монеты, то фальшивая монета A . Если же Тимон ответит, что среди них есть фальшивая монета, то A — настоящая и третьим вопросом Пумба отдаст Тимону монету E и спросит про монеты A и B . Если среди них есть фальшивая, то это монета B , а если нет, то фальшивой является монета C .

Случай 2. Получен ответ, что среди B и C нет фальшивой монеты. Если бы у Тимона была фальшивая монета (A), то обе монеты B и C были бы настоящие, и тогда Тимон солгал бы, что среди них есть фальшивая. Это означает, что монета A — настоящая и Тимон говорит правду: монеты B и C тоже настоящие. Вторым вопросом Тимон спросит про монеты B и E , отдав монету C . Если Тимон ответит, что фальшивая монеты есть, то это монета E , в противном случае — монета D . В этом случае Пумба сможет обойтись двумя вопросами.